Вестник Тюменского государственного университета.
Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2(2). 85-91

© А. А. ГУБАЙДУЛЛИН, А. Ю. МАКСИМОВ
Тюменский филиал института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Тюменский государственный университет
timms@tmn.ru, allevella@gmail.com

УДК 532.685

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАПЛИ В СУЖЕНИИ КАПИЛЛЯРА

NATURAL FREQUENCIES OF LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF A DROPLET IN THE CONSTRICTION OF THE CAPILLARY TUBE

Актуальной задачей, возникающей при совершенствовании волновых технологий повышения нефтеотдачи пластов, является задача по нахождению частоты свободных продольных колебаний капель (ганглий) нефти, защемленных в сужениях пор. Для определения собственных частот колебаний капель можно использовать компьютерное моделирование. В качестве математической модели для численного исследования могут быть использованы уравнения Навье–Стокса или решеточные уравнения Больцмана. Однако для получения предварительных оценок и решения инженерных задач удобно иметь формулу, позволяющую, пусть приближенно, получить искомый результат.

В настоящей работе получена формула для собственной частоты продольных колебаний капли, окруженной несмешивающейся с ней жидкостью, в сужении капилляра конической формы. Проведено сопоставление результатов расчетов по формуле с численным решением задачи. Проведен анализ зависимости частоты свободных колебаний капли в капилляре от статического перепада давления, поверхностного натяжения и краевого угла смачивания.

The actual problem of improving wave technologies of enhanced oil recovery lies in challenges of finding the frequency of longitudinal oscillations of oil droplets (ganglion), jammed in the narrowing of pores. To determine the natural frequencies of droplets computer modeling can be used. As a mathematical model for the numerical study Navier – Stokes equations or Lattice-Boltzmann method can be used. However, to obtain preliminary estimates and solve engineering problems it is convenient to have a formula that allows, even approximately, getting the desired result.

In this paper a formula is obtained for the natural frequencies of longitudinal oscillations of a droplet surrounded by immiscible with its fluid in the narrowing of capillary conical shape. Comparison of the results of calculations by the formula with the numerical solution of the problem has been carried out. The analysis of the frequency of the droplet oscillations in the static pressure difference, surface tension and contact angle of wetting has been carried out.

© ФГБОУ ВПО Тюменский государственный университет

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Собственная частота, капля, сужение капилляра, продольные колебания.

KEY WORDS. Natural frequency, a droplet, narrowing of the capillary tube, longitudinal oscillations.

Введение

Одной из важных задач, представляющей научный интерес и имеющей различные приложения, например, при добыче нефти, является вытеснение одной жидкости другой несмешивающейся с ней жидкостью в пористой среде.

В процессе вытеснения часть вытесняемой жидкости может остаться в пористой среде в виде капель (ганглий), защемленных в сужении пор. При разработке волновых технологий повышения нефтеотдачи пластов возникает задача об определении собственных частот продольных колебаний капель нефти, защемленных в порах. Как показано в ряде работ [1-5], если накладывать внешнее вибрационное воздействие с частотой, близкой к собственной частоте продольных колебаний капли при заданном статическом перепаде давления, то может наблюдаться явление резонанса. Данное явление хорошо известно и применяется с 60-х гг. на нефтяных месторождениях, где для создания поля упругих колебаний в призабойную зону пласта опускают специальные низкочастотные излучатели [6]. Благодаря накопленным материалам исследований известно, что имеет место эффект увеличения проницаемости нефтеносных пластов под действием внешних акустических полей [6-7]. Однако физические механизмы таких явлений еще недостаточно изучены.

В настоящей работе получена формула, позволяющая находить собственные частоты продольных колебаний капель в капиллярах с коническим сужением. Проведен численный анализ колебаний капли в рамках модельного дифференциального уравнения второго порядка. Исследовано влияние статического перепада давления, угла смачивания и поверхностного натяжения на собственную частоту колебаний капель.

Постановка задачи

Пусть в осесимметричном канале с сужением при постоянном перепаде давления находится защемленная капля жидкости, окруженная другой несмешивающейся с ней жидкостью (рис. 1). Требуется определить собственную частоту продольных колебаний капли в сужении при заданном перепаде давления.

Рассмотрим цилиндрический капилляр, имеющий сужение конической формы. Зависимость радиуса капилляра от продольной координаты *r(z)* можно задать формулой:

$$r(z) = -\frac{r_{\max} - r_{\min}}{L} z + r_{\min}, \quad z \in [-\mathrm{L}, 0], \tag{1}$$

где z — продольная координата; r_{min}, r_{max} — минимальный и максимальный радиусы канала; ℓ — протяженность зоны контакта капли с капилляром; α — угол смачивания; L — протяженность конического сужения (рис. 1).

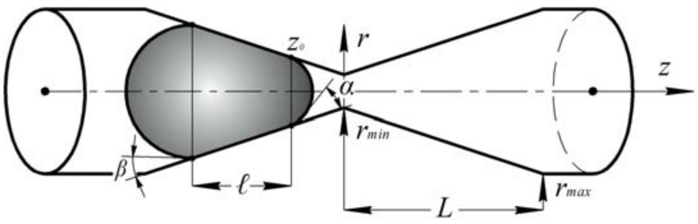

Рис. 1. Геометрия канала с сужением

Модельное уравнение [1; 8-9] для капилляра с коническим сужением с учетом равновесных углов смачивания можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\Delta P_{stat}}{\rho\ell} + \frac{2\sigma}{\rho\ell}\left[\frac{B}{-\frac{r_a(z-\ell)}{L}+r_{\min}} - \frac{A}{-\frac{r_a z}{L}+r_{\min}}\right], \tag{2}$$

где z — текущая продольная координата правого мениска; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости капли; ΔP_{stat} — статический перепад давления на длине ℓ, $r_a = r_{min} - r_{max}$, $A = \cos\left(\operatorname{arctan}\left(\frac{r_a}{L}\right) + \frac{\pi\alpha}{180}\right)$, $B = \cos\left(\operatorname{arctan}\left(\frac{r_a}{L}\right) + \frac{\pi\beta}{180}\right)$, α и β — углы смачивания, выраженные в градусах, для правого и левого мениска соответственно.

Формула для вычисления собственной частоты продольных колебаний капли

Для случая когда сужение капилляра имеет коническую форму, можно получить формулу для вычисления собственной частоты продольных колебаний капли. Предположим, что при наложении внешнего статического перепада ΔP_{stat} капля покоится в защемленном положении в сужении. Коническая геометрия сужения определяется формулой (1), а перепад капиллярного давления на капле (длине ℓ) рассчитывается по формуле:

$$\Delta P_{cap} = 2\sigma\left(\frac{A}{-\frac{r_a z}{L}+r_{\min}} - \frac{B}{-\frac{r_a(z-\ell)}{L}+r_{\min}}\right). \tag{3}$$

Заданный статический перепад давления ΔP_{stat} уравновешивается перепадом капиллярного давления, рассчитываемым по формуле (3). Необходимо найти продольную координату линии трехфазного контакта z_0 (рис. 1) покоящейся капли. Искомое z_0 можно найти из равенства этих перепадов:

$$z_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta P_{stat} r_a} \Big(\big(\ell r_{max} + (2L - \ell) r_{min} \big) \Delta P_{stat} + 2\sigma L (B - A)$$
$$- \sqrt{\ell^2 r_a{}^2 \Delta P_{stat}^2 + 4L\ell\sigma r_a (A + B) \Delta P_{stat} + 4\sigma^2 L^2 (A - B)^2} \Big) .$$

Уравнение (2) можно рассматривать как уравнение свободных продольных колебаний капли и записать его в виде:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\Delta P_{stat} + \Delta P_{cap}(z)}{\rho \ell} . \qquad (4)$$

Линеаризуя нелинейное уравнение (4), получим:

$$\ddot{z} - \sqrt{\frac{2\sigma r_a}{\rho \ell} \left(\frac{A}{R_A} - \frac{B}{R_B} \right)} \cdot z + F = 0 , \qquad (5)$$

где $R_A = \left(|z_0| r_a + L r_{\min} \right) \left(r_{\min} + \frac{|z_0| r_a}{L} \right), R_B = \left(\left(|z_0| + \ell \right) r_a + L r_{\min} \right) \left(r_{\min} + \frac{\left(|z_0| + \ell \right) r_a}{L} \right);$

F — слагаемое, не зависящее от z, здесь не приводится из-за громоздкости выражения.

Уравнение (5) представляет собой уравнение гармонических колебаний с циклической частотой ω_0. Таким образом, формула для вычисления собственной частоты колебаний капли, зажатой в сужении конической формы, имеет вид:

$$\omega_{соб} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\sigma r_a}{\rho \ell} \left(\frac{A}{R_A} - \frac{B}{R_B} \right)} . \qquad (6)$$

Вычисление собственной частоты продольных колебаний капли

Как показано в работе [1], знание собственной частоты колебаний капли важно для нахождения эффективной частоты волнового воздействия, т. е. частоты, при которой мобилизующую каплю воздействие имеет минимальную амплитуду.

В качестве теста проведем сравнение результатов, полученных при помощи формулы (6) с результатами численного решения уравнения (2). Значения определяющих параметров возьмем из работы [10], где авторы на экспериментальной установке определяли параметры вибрационного воздействия, необходимого для преодоления каплей сужения капилляра. В капилляре с сужением в виде одного периода синусоиды с параметрами: L = 12,1 мм; r_{max} = 4,23 мм; r_{min} = 0,12 мм, помещали капли разного объема, при этом, для того чтобы исключить эффекты плавучести, плотности жидкостей были подобраны одинаковыми и равными 998 кг/м^3, поверхностное натяжение на контактной границе жидкостей составило $\sigma = 0{,}016$ Н/м. В указанной работе авторы, вместо того чтобы указать объем капли, использовали параметр длины зоны контакта капилляра с каплей, который составил $\ell = 11{,}8$ мм. Используем эти параметры для построения геометрии и определения зависимости $\omega_{\text{собст}}$ от перепада ΔP_{stat} для капилляра с коническим сужением.

Полученные результаты представлены на рис. 2. Статический перепад давления изменялся в пределах от 0 до критического перепада давления $\Delta P_{crit} = 245{,}15$ Па, при котором капля проходит сужение. Последний определялся численно по уравнению (2). Видно, что результаты вычислений хорошо совпадают. Кроме того, можно заметить, что зависимость $\omega_{\text{собст}}$ от ΔP_{stat} является практически линейной.

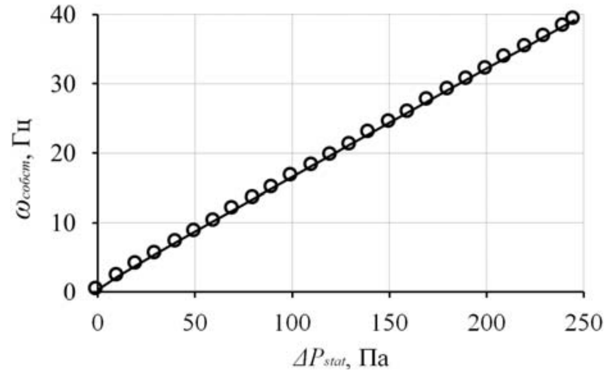

Рис. 2. Зависимость собственной частоты колебаний капли от статического перепада давления (о — уравнение (2), сплошная кривая — формула (6))

Исследуем зависимость собственной частоты от поверхностного натяжения и краевого угла смачивания. В качестве иллюстрации на рис. 3а приведены результаты расчетов для трех значений коэффициента поверхностного натяжения $\sigma = 0{,}008$; $0{,}016$; $0{,}032$ *Н/м* при угле смачивания, равном нулю.

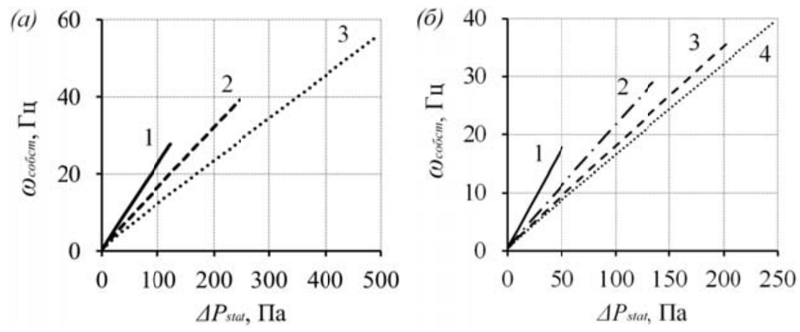

Рис. 3. Зависимости собственной частоты продольных колебаний капли от статического перепада давления, вычисленные по формуле (6):
а) $\sigma = 0{,}008$ *Н/м* — кривая 1, $\sigma = 0{,}016$ *Н/м* — кривая 2, $\sigma = 0{,}032$ *Н/м* — кривая 3;
б) σ = 0,016 *Н/м*, углы смачивания: кривая 1 — 60°, кривая 2 — 40°, кривая 3 — 20°, кривая 4 — 0°

Из рис. 3а следует, что с увеличением σ при неизменном ΔP_{stat} собственная частота падает. В то же время из формулы (6) при фиксированных значениях других параметров следует $\omega_{\text{собст}} \approx \sqrt{\sigma}$, т. е. частота растет с увеличением поверхностного натяжения. На самом деле собственная частота капли зависит от положения защемленной капли в сужении. Чтобы это положение было таким же при большем значении σ, нужно изменить ΔP_{stat}. Этот результат может быть использован для описания двухфазного течения жидкости при нелинейном законе фильтрации [11].

Зависимость собственной частоты от угла смачивания проиллюстрировано на рис. 3б. В расчетах принималось, что углы смачивания на левом и правом мениске совпадают. Видно, что увеличение угла смачивания приводит к росту собственной частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губайдуллин А. А., Максимов А. Ю. Моделирование динамики капли нефти в капилляре с сужением // Вестник Тюменского государственного университета. 2013. № 7. С. 71-77.

2. Hilpert M. Capillarity-induced resonance of blobs in porous media: Analytical solutions, Lattice-Boltzmann modeling, and blob mobilization // J. of Colloid and Interface Science. 2007. Vol. 309(2). Pp. 493-504.

3. Николаевский В. Н., Степанова Г. С. Нелинейная сейсмика и акустическое воздействие на нефтеотдачу пласта // Акустический журнал. 2005. Т. 51. С. 150-159.

4. Максимов Г. А., Радченко А. В. Моделирование интенсификации нефтедобычи при акустическом воздействии на пласт из скважины // Акустический журнал. 2005. Т. 51. С. 118-131.

5. Сердюков С. В., Курленя М. В. Механизм стимуляции добычи нефти сейсмическими полями малой интенсивности // Акустический журнал. 2007. Т. 53. № 5. С. 703-714.

6. Дыбленко В. П., Камалов Р. Н., Шарифуллин Р. Я., Туфанов И. А. Повышение продуктивности и реанимация скважин с применением виброволнового воздействия. М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2000. 381 с.: ил.

7. Сургучев М. Л., Кузнецов О. Л., Симкин Э. М. Гидродинамическое, акустическое, тепловое циклическое воздействия на нефтяные пласты. М.: Недра, 1975. 184 с.

8. Beresnev I. A. Theory of vibratory mobilization of nonwetting fluids entrapped in pore constrictions // GEOPHYSICS. Vol. 71. № 6. 2006. Pp. 47-56.

9. Beresnev I. A., Deng, W. Viscosity effects in vibratory mobilization of residual oil // GEOPHYSICS. Vol. 75. № 4. 2010. Pp. 79-85.

10. Beresnev I., Gaul W., Vigil R. D. Direct pore-level observation of permeability increase in two-phase flow by shaking // GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS. Vol. 38. 2011. L20302.

11. Губайдуллин Д. А., Никифоров Г. А. Моделирование двухфазного течения жидкости в слоистом нефтяном пласте при нелинейном законе фильтрации // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. № 1(1). Т. 1. 2015. С. 59-64.

REFERENCES

1. Gubaidullin, A. A., Maksimov, A. Y. Modeling of dynamics of oil droplet in a capillary with narrowing // Herald of the Tyumen State University. 2013. № 7. Pp. 71-77.

2. Hilpert, M. Capillarity-induced resonance of blobs in porous media: Analytical solutions, Lattice-Boltzmann modeling, and blob mobilization // J. of Colloid and Interface Science. 2007. Vol. 309 (2). Pp. 493-504.

3. Nikolaevski, V., Stepanova, G. S. Nonlinear seismic and acoustic impact on oil recovery // Acoustical Physics. 2005. Vol. 51. Pp. 150-159.

4. Maksimov, G. A, Radchenko A. V. Modeling of oil production intensification at acoustical impact on the formation of the well // Acoustical Physics. 2005. Vol. 51. Pp. 118-131.

5. Serdyukov, S. V., Kurlenya, M. V. The mechanism of stimulation of oil fields of low intensity seismic // Acoustical Physics. 2007. Vol. 53. № 5. Pp. 703-714.

6. Dyblenko, V. P., Kamalov, R. N., Sharifullin, R. J., Tufanov I. A. Increased productivity and resuscitation wells using vibration impact. M., 2000. 381 p.

7. Surguchev, M. L., Kuznetsov, O. L., Simkin, E. M. Hydrodynamic, acoustic, thermal cyclic exposure to oil reservoirs. M.: Nedra, 1975.

8. Beresnev, I. A. Theory of vibratory mobilization of non-wetting fluids entrapped in pore constrictions // GEOPHYSICS. Vol. 71. № 6. 2006. Pp. 47-56.

9. Beresnev, I. A., and W. Deng. Viscosity effects in vibratory mobilization of residual oil // GEOPHYSICS. Vol. 75. № 4. 2010. Pp. 79-85.

10. Beresnev, I., Gaul, W., Vigil, R. D. Direct pore-level observation of permeability increase in two-phase flow by shaking // GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS. Vol. 38. 2011. L20302.

11. Gubaidullin, D. A., Nikiforov, G. A. The simulation of two-phase fluid flow in a layered oil reservoir under a nonliner filtration law // Bullettin of the Tyumen State University. Physical and mathematical modeling. Oil, Gas , Energy. № 1(1). T. 1. 2015. Pp. 59-64.

Авторы публикации

Губайдуллин Амир Анварович — директор Тюменского филиала ФГБУН Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, профессор Тюменского государственного университета, доктор физико-математических наук

Максимов Алексей Юрьевич — инженер-исследователь Тюменского филиала ФГБУН Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, старший преподаватель Тюменского государственного университета

Authors of the publication

Amir A. Gubaidullin — Doctor of Physical and Mathematical Science Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences. Director

Aleksey Yu. Maksimov — Research engineer Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences